Varianta 066

Subiectul I

a) Aria cerută este $\frac{12\cdot 5}{2}=30$ deoarece triunghiul este dreptunghic cu ipotenuza 13

b) $DE=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

c) $z=-1-4i \Rightarrow \bar{z}=-1+4i$

d) Deoarece $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow L, M, N$ coliniare

e) Evident latura este 10 si perimetrul 40

f) $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{15}{16}$ şi cum $x\in(0;\frac{\pi}{2})\Rightarrow \cos x>0$ adica $\cos x=\frac{\sqrt{15}}{4}$

Subiectul II

1.

a) Restul este $f(-1)=-2-4-5-1=-12$

b) Deoarece 0,1,2,3 verifică, probabilitatea cerută este $\frac{4}{5}$

c) Evident $g(x)=x+2 \Rightarrow g(0)=2$

d) Ecuația este echivalentă cu :

$2x^2+7=x^4+8 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

e) Suma este 0

2.

a) $f'(x)=3x^2+1$

b) $f'(x)>0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbf{R}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)=13$

d) $f'(x)=4 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm 1$

e) $\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-2007x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2007=\frac{-8025}{4}$

Subiectul III

a) Egalitatea se verifică prin calcul direct

b) Ecuația este echivalenta cu $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1-\frac{1}{x}-x-1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \\ \quad sau \\ x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}=0 \end{cases}$$

Notând în a doua ecuație $x+\frac{1}{x}=t$, obțin $t^2-t-2=0; \Delta_t=1+8=9; t_1=2; t_2=-1$

$x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ si $x+\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ si $x \notin \mathbf{R}$

Concluzie $x=\pm 1$

c) Folosind a) am $ab-\frac{1}{ab}=a+b-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\underbrace{\frac{(a-1)(b-1)(ab-1)}{ab}}_{\geq 0} \geq a+b-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

d) Pentru n=2 aplic c).

e) Pentru n=3 am: $a_1a_2a_3-\frac{1}{a_1a_2a_3} \geq a_1+a_2+a_3-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}$, apoi $a_1=2^a$, $a_2=2^b, a_3=2^c$ vor conduce la inegalitatea cerută

f) Inegalitatea este echivalentă cu: $x-y+\frac{x-y}{xy}>0$ sau $(x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)>0$ care este adevărată

g) Punem $a_1=...=a_n=a$ în egalitatea de la d) și rezultă $a^n-\frac{1}{a^n} \geq n\left(a-\frac{1}{a}\right)$

Subiectul IV

a) $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt = x\Big|_0^x = x (\forall) x \in \mathbf{R}$

b) $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$

c) Ecuația devine $\frac{x^2}{2}+x=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=-2$

d) Inducție după n. Pentru n=1 vezi a). Presupun $f_n(x)=\frac{x^n}{x!}$ si am $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt =$

$= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Deci $f_n(x)=\frac{x^n}{n!} (\forall) n \geq 1, n \in \mathbf{N}$

e) $f_{n+1}'(x)=\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)' = \frac{x^n}{n!} = f_n(x), (\forall) n \in N, (\forall) x \in \mathbf{N}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_3(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{2!}{x^2}=+\infty$

g) $f_n(1)=\frac{1}{n!}; \lim_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0$